

$u = u(x, t)$ — вертик. смещение m -к струны

(и) // $u = u(x, t)$ — отклонение от $u \equiv 0$

$T > 0$ — натяжение струны. (// сила натяжения $F = \frac{k_2 \cdot u}{\Delta x}$)

$\rho > 0$ — лин. плотность струны ($\frac{k_2}{m}$)

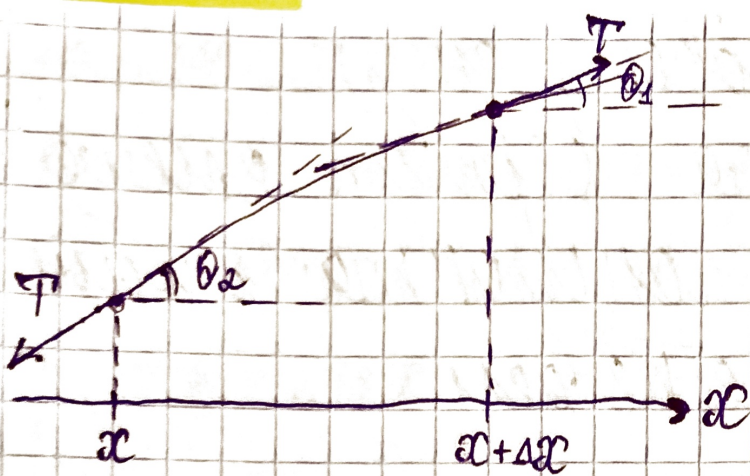
Вывод ур-ния колебаний струны.

Но д/начала еще одна физ. переменная:

$F \in F(x, t)$ — лин. плотность внешней

сил ($\frac{F}{m} = \frac{k_2 \cdot u}{\Delta x} \cdot \frac{1}{m} = \frac{k_2}{\Delta x^2}$)

Выделим отдельный фрагмент $[x, x + \Delta x]$
внутри струны
// Рис. на след. стр. //



⊗ вертикал. состав-
ляющую силы:

на правом краю

$$= T \sin \theta_1 \approx T \operatorname{tg} \theta_1 =$$

$$= T' u_x(x + \Delta x, t);$$

на левом краю $= -T \sin \theta_2 \approx -T \operatorname{tg} \theta_2 =$
 $= -T' \cdot u_x(x, t)$

Суммарная сила $= T' (u_x(x + \Delta x, t) -$
 $- u_x(x, t))$ // используется предположе-
 ние о малости колебаний и малости
 $\angle \theta$

Составим ур-ние Лапласа (II з.л.):

$$\rho \Delta x u_{tt}(\xi, t) = T' (u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)) +$$

$$+ F(\xi, t) \Delta x. \text{ Здесь } \xi \in [x, x + \Delta x] -$$

— произвольная т. $\Rightarrow \rho u_{tt}(\xi, t) =$
 $= T' \cdot \frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} + F(\xi, t)$

При $\Delta x \rightarrow 0+$ получаем: $\rho u_{tt}(\xi, t) = T' u_{xx}(x, t) +$
 $+ F(x, t)$

В редукцированной форме: $[u_{tt} = a^2 u_{xx} +$
 $+ f(x, t)], u = u(x, t), a^2 = T'/\rho, f = F(x, t)/\rho$ (1)

(1) - ур-ние малых колебаний струны
Здесь $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}} > 0$ ($(\frac{H}{\kappa})^{1/2} = (\frac{\kappa \cdot \cancel{H}}{c^2} \cdot \frac{H}{\kappa})^{1/2} =$

$= \frac{H}{c}$ - размерность скорости). a - ск-ть

распростр-ния возмущений в струне

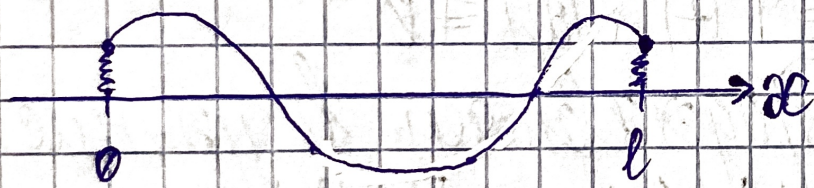
Типичные краевые условия

I) $u(0, t) \equiv 0$ - закрепленный край

II) $u_x(0, t) \equiv 0$ - свободный край

III) Усл-е упругого закрепления

На краях действует упругая возвращающая сила



пропорциональная отклонению струны от положения равновесия

$$-T u_x(0, t) = -k u(0, t)$$

$$T u_x(l, t) = -k u(l, t) \quad \text{// закон Гюка}$$

$$\text{В редукц. форме: } u_x(0, t) - k u(0, t) = 0,$$

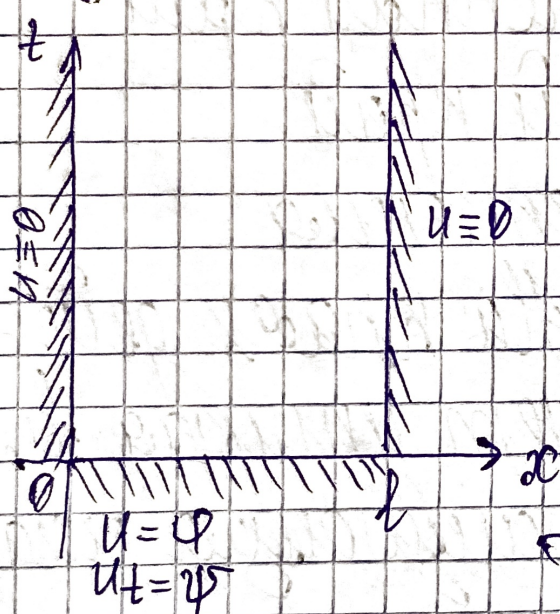
$$u_x(l, t) + k u(l, t) = 0. \text{ Здесь}$$

$$k = \frac{k}{T} > 0 - \text{коэфф. упругого закрепления}$$

Простейшая смешанная начальная
краевая задача д/у-ния колебания
струны:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 \leq x \leq l, t > 0, \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $\varphi(x), \psi(x)$ — заданные ф-ции; $u = u(x, t)$



Реш [Метод Фурье (метод
разделения переменных)]

Элементар. реш.: $u(x, t) = T(t)X(x) \neq 0$

Подставляем в ур-ние:

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{пропорция} \Rightarrow \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\vartheta \text{ (const)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X''(x) + \vartheta X(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l$$

Добавляем кр. усл-я из исход. зад. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{получаем ЭУД: } \begin{cases} X''(x) + \vartheta X(x) = 0, & 0 \leq x \leq l, \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Спектр: } \vartheta_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, \quad X_k(x) = \sin \frac{\pi k x}{l}, \quad k = 1, \infty$$

Представим T_k в пропорцию, состав-
 лем ОДУ $g/T'(t) \Rightarrow T''(t) = -\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 a^2 T(t)$

$$\sim T''(t) + \left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 T(t) = 0 \Rightarrow$$

$$[y''(t) + \omega^2 y(t) = 0 \Rightarrow y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t]$$

$$\Rightarrow T_k(t) = A_k \cos \frac{\pi k a}{l} t + B_k \sin \frac{\pi k a}{l} t, \quad k = \overline{1, \infty}$$

$\Rightarrow$ получили набор элементар. рещ.

$$u_k(x, t) = T_k(t) X_k(x) = \left(A_k \cos \frac{\pi k a}{l} t + B_k \sin \frac{\pi k a}{l} t \right)$$

$$\cdot \sin \frac{\pi k x}{l}, \quad k = \overline{1, \infty} \quad // \text{Принцип суперпозиции}$$

$$\text{Общ. рещ.: } u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{\pi k a}{l} t + B_k \sin \frac{\pi k a}{l} t \right) \cdot \sin \frac{\pi k x}{l}, \quad A_k, B_k = ?$$

Ур-ние колебаний и краевые условия
 формально выполнены.

$$\text{Нач. усл.: } u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{\pi k x}{l} = \varphi(x) -$$

— ряд Фурье по $\sin$, где $A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx$,
 $k = \overline{1, \infty}$.

$$u_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \frac{\pi k a}{l} \cdot \sin \frac{\pi k x}{l} = \psi(x)$$

$$\Rightarrow B_k \cdot \frac{\pi k a}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx \Rightarrow B_k = \frac{2}{\pi k a} \cdot$$

$$\int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx, \quad k = \overline{1, \infty}$$

Отбери: $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos \frac{\pi k a}{l} t + B_k \sin \frac{\pi k a}{l} t) \sin \frac{\pi k x}{l}$, где $A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx$, $B_k =$

$$= \frac{2}{\pi k a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx \quad (3)$$

Формулировка Γ непрерывности: $\varphi \in C^3[0, l]$, причем $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ и $\varphi'(0) = \varphi'(l) = 0$. $\square$, также, $\psi \in C^2[0, l]$, причем $\psi(0) = \psi(l) = 0$. Тогда ф-ла (3) определяет классич. реш. зад. (1) из класса $C^{2,2}([0, l] \times [0; +\infty))$ (и даже из $C^2([0, l] \times [0; +\infty))$).

▲ Без док-ва ■

! Зам. If усл-я Γ наруш-ся, то ф-ла (3) определяет формальное (не очень удобное) реш. поставленной зад. При этом соотнош-я в с-ме (2) обычно выполн-ся почти всюду в полуплоск. $[0, l] \times [0; +\infty)$

Анализ ф-лы (3) [практический]
Полезное предпр-ние: $A \cos \omega t + B \sin \omega t =$
 $= \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \omega t \right) = h \cos(\omega t - \tau) \quad \tau \in [0, 2\pi]$

$$\cos \tau = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \sin \tau = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \tau = \sqrt{A^2+B^2} (\cos \omega t +$$

$$\cos \tau + \sin \omega t \sin \tau) = \sqrt{A^2+B^2} \cos(\omega t - \tau) = \sqrt{A^2+B^2} \cos \omega(t - \frac{\tau}{\omega}), \text{ где } \theta = \frac{\tau}{\omega} \text{ (Основная}$$

теорема колебаний) $\Rightarrow A_k \cos \frac{\pi k a}{l} t + B_k$

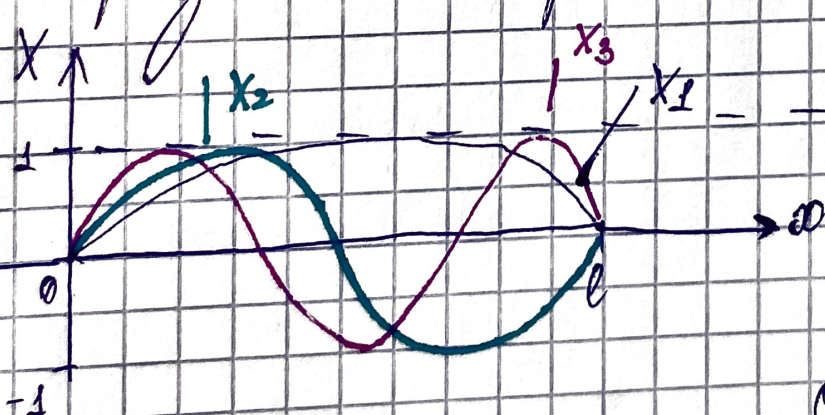
$$\sin \frac{\pi k a}{l} t = \sqrt{A_k^2+B_k^2} \cos \frac{\pi k a}{l} (t - \theta_k) - \text{закон}$$

колебания k -й гармоники. Здесь $A_k =$

$$\sqrt{A_k^2+B_k^2} - \text{амплитуда } k\text{-ой гармоники;}$$

$$\omega_k = \frac{\pi k a}{l} - \text{круговая частота } k\text{-ой гармоники}$$

B_k - фаза k -ой гармоники

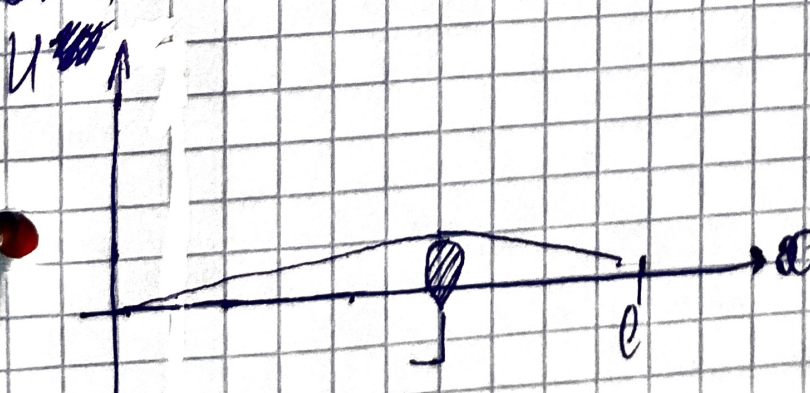


$$X_k(x) = \sin \frac{\pi k x}{l}$$

$$\omega_1 = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}} -$$

- основной тон струны. В основ-

ном, мы слышим только его.



$\omega_k = k\omega_1$ - обертоны струны при $k=2, \infty$.

Они образуют арифметическую прогрессию

ω_1 $2\omega_1$ $3\omega_1$ $4\omega_1$

октава

квинта

октава